

# Плоское напряженное состояние проушины, соединенной с жестким круглым включением

В.И. Рязских, email: ryazhkih\_vi@mail.ru

А.В. Рязских, email: ryazhkihav@bk.ru

В.А. Рябцев, wlandrr@yandex.ru

Воронежский государственный технический университет

**Аннотация.** В работе в вариационной формулировке рассмотрено плоское напряженное состояние тонкой пластины в форме проушины, соединенной с круглым жестким телом. Задача решается гибридным методом, использующим методы оптимизации, конечных элементов и конечных разностей. Исследуется симметричное воздействие и поэтому рассмотрена половина одной из частей, расположенной вблизи от отверстия.

**Ключевые слова:** плоское напряженное состояние, пластина, гибридный метод, метод оптимизации, метод конечных элементов, метод конечных разностей.

## Введение

В данной работе рассмотрено плоское напряженное состояние весьма распространенной в технике детали – плоской проушины, предназначенной для передачи сил на валы, оси и крепежные элементы машин и конструкций.

Пусть  $u, v$  – перемещения вдоль осей системы координат  $x, y$ , а  $u_{,x}, u_{,y}, u_{,y}, v_{,x}$  – частные производные перемещений по переменным  $x$  и  $y$ . Пусть деформации и напряжения в точке определяются матрицами

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u_{,x} & u_{,y} & u_{,y} + v_{,x} \end{bmatrix}^T, \quad (1)$$
$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}^T$$

Пусть  $E, \nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины. Закон Гука для плоского напряженного состояния имеет вид

$$\hat{\sigma} = D \hat{\varepsilon} \quad (2)$$

где

$$D = e \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5(1 - \nu) \end{bmatrix} \quad (3)$$

- матрица упругости,  $e = E / (1 - \nu^2)$ .

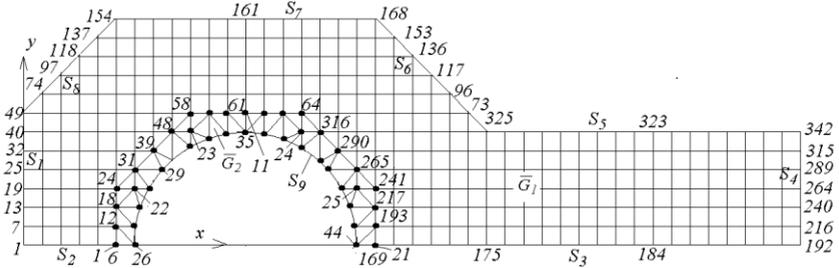


Рисунок. Рисунок. Расположение и нумерация узлов и областей.

Пусть  $\bar{G}$  - область, занятая срединной плоскостью проушины в системе  $xOy$  (рисунок) с границей  $s$ ,  $G$  - открытое множество. Пусть жесткое включение неподвижно и при деформировании проушины контакт между ней и включением сохраняется. Тогда на границе отверстия  $S_9$  перемещения отсутствуют. Внешние края проушины - границы  $S_1, S_5 - S_8$  свободны. Правое сечение проушины  $S_4$  получает заданное поступательное перемещение  $u = u_0$ .

Граничные условия, за исключением закрепленных точек на  $S_9$ , где  $u = 0, v = 0$ , имеют вид:

$$S_1 \quad \sigma_x = 0, \tau_{xy} = 0; \quad (4)$$

$$S_2, S_3 \quad \nu = 0, \sigma_x = 0, \tau_{xy} = 0; \quad (5)$$

$$S_4 \quad u = u_0, \tau_{xy} = 0; \quad (6)$$

$$S_5, S_7 \quad \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0. \quad (7)$$

Пусть  $\sigma_\nu = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \cos \varphi \sin \varphi$  и  $\tau_\nu = (\sigma_y - \sigma_x) \cos \varphi \sin \varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$  - нормальное и касательное напряжения на границе;  $\varphi$  - угол между нормалью к границе и осью  $x$ . Тогда граничные условия на границах  $S_6$  и  $S_8$  примут вид:

$$S_6 \quad \sigma_\nu = 0, 5(\sigma_x + \sigma_y + 2\tau_{xy}) = 0, \tau_\nu = 0, 5(\sigma_y - \sigma_x) = 0; \quad (8)$$

$$S_8 \quad \sigma_v = 0,5(\sigma_x + \sigma_y - 2\tau_{xy}) = 0, \quad \tau_v = 0,5(\sigma_x - \sigma_y) = 0 \quad (9)$$

Для получения граничных условий, выраженных через перемещения, используются очевидные соотношения

$$\sigma_x = e(u_{,x} + \nu v_{,y}), \quad \sigma_y = e(v_{,y} + \nu u_{,x}), \quad \tau_{xy} = 0,5e(1 - \nu)(u_{,y} + v_{,x}). \quad (10)$$

Гибридный метод описан в [1]. Он заключается в использовании в решении задач методов оптимизации, конечных элементов и конечных разностей. Преимущество гибридного метода заключается в использовании в простых прямоугольных областях вместо конечно – элементных соотношений конечно – разностных соотношений. Это позволяет значительно экономить потребную память ЭВМ. Гибридный метод сочетает удобства и устраняет недостатки указанных методов (подробно в [1]), в частности позволяет при оптимизации не учитывать естественные граничные условия для искомых функций. Применительно к данной задаче этот метод заключается в разделении области  $\bar{G}$  на несколько областей. Область  $\bar{G}_1$  имеет сравнительно простую форму с границами, параллельными и перпендикулярными осям координат, а также в виде наклонных прямых линий, проходящих через узлы сетки. В такой области краевая задача аппроксимируется МКР. Область  $\bar{G}_2$ , примыкает к сложной части границы – отверстию и в ней для дискретизации уравнений задачи используются конечные элементы. Это позволяет, хотя бы приближенно, воспроизвести криволинейную часть границы  $\bar{G}$ , и избежать проблем, связанных с использованием фиктивных узлов сетки для формирования граничных условий. Область  $\bar{G}_1$  может быть разбита на несколько более простых областей. Узлы КЭ на границе между  $\bar{G}_1$  и  $\bar{G}_2$  рекомендуется совмещать с узлами сетки.

На рисунке жирными точками указаны узлы КЭ. Общие узлы КЭ и сетки пронумерованы в порядке следования номеров узлов сетки. Эти же узлы с системе номеров узлов КЭ имеют номера от 1 до 21. Узлы с номерами 22-25 принадлежат только КЭ. Узлы КЭ с номерами 26-44 лежат на границе отверстия.

Полная энергия упругого деформирования проушины

$$U = 0,5 \int_G h \hat{\epsilon}^T \mathbf{D} \hat{\epsilon} dF = U_1 + U_2 \quad (11)$$

где,  $U_1, U_2$  - энергии деформирования для частей пластины  $\bar{G}_1$  и  $\bar{G}_2$ .

Область  $\bar{G}_1$  заменяется системой  $l$  регулярно расположенных узлов с шагами  $h_x$  и  $h_y$  вдоль осей  $x$  и  $y$ , а производные перемещений в узлах  $\bar{G}_1$  – широко известными конечно – разностными выражениями с точностью порядка  $h_x^2$  или  $h_y^2$ . С учетом разностных выражений  $u_x$  и  $u_y$  получается  $U_1(\bar{w}_1) \cong \tilde{U}_1(\bar{w}_1) = \bar{w}_1^T \tilde{M}_1 \bar{w}_1$ , где  $\tilde{M}_1$  - симметричная блочная матрица порядка  $l \times l \times (2 \times 2)$  системы разностных уравнений, в которой неизвестными считаются величины перемещений всех узлов, покрывающих  $\bar{G}_1$ , в том числе и граничных и входящих в КЭ,  $\bar{w}_1$  - блочная матрица узловых перемещений порядка  $l \times (2 \times l)$ .

Градиент  $\tilde{U}_1$  в точке  $\bar{w}_1$  определяется по формуле  $grad(\tilde{U}_1) = 2 \tilde{M}_1 \bar{w}_1$ .

Для вычисления  $U_2$  МКЭ в области  $\bar{G}_2$  используется простейший треугольный элемент с узлами в вершинах [2].

Если  $u_k$  ( $k = i, j, m$ ) - некоторое перемещение узлов КЭ с локальными номерами 1,2,3, соответствующими глобальным номерам узлов  $i, j, m$ , то перемещение точки КЭ с координатами  $x$  и  $y$  представляется в виде линейной по  $x$  и  $y$  функции  $\tilde{u} = \hat{N} \hat{u} = [N_1, N_2, N_3]^T [u_i, u_j, u_m]^T$ , где  $N_{(.)}$  - функции формы КЭ;  $\hat{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$  - матрица - столбец соответствующих перемещений.

Если  $\hat{w} = [u_i \ v_i \ u_j \ v_j \ u_m \ v_m]^T$  - матрица узловых перемещений, то деформация в пределах КЭ определяется матрицей [3]

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & N_{j,x} & 0 & N_{m,x} & 0 \\ 0 & N_{i,x} & 0 & N_{j,x} & 0 & N_{m,x} \\ N_{i,y} & N_{i,y} & N_{j,y} & N_{j,y} & N_{m,y} & N_{m,y} \end{bmatrix}^T \bar{w} = \mathbf{B} \bar{w}. \quad (12)$$

Если  $p$  - номер КЭ,  $n$  - количество КЭ, а  $r$  - количество их узлов в  $\bar{G}_2$ , то при замене  $\bar{G}_2$  системой КЭ  $U_2$  заменяется функционалом

$$\tilde{U}_2 = 0.5 \sum_{p=1}^n \hat{\varepsilon}_p^T \tilde{\mathbf{D}}_p \hat{\varepsilon}_p = 0.5 \sum_{p=1}^n \hat{w}_p^T \mathbf{B}_p^T \tilde{\mathbf{D}}_p \mathbf{B}_p \hat{w}_p = 0.5 \bar{w}_2^T \tilde{\mathbf{M}}_2 \bar{w}_2 \quad (13)$$

где  $\bar{w}_2$  - матрица узловых перемещений порядка  $r \times (2 \times 1)$ ,  $\bar{M}_2$  - блочная матрица жесткости ансамбля КЭ порядка  $r \times r \times (2 \times 2)$ .

Градиент функционала  $\bar{U}_2$  в точке  $\bar{w}_2$  определяется выражением  $\text{grad}(\bar{U}_2) = 2M_2 \bar{w}_2$ .

Согласно [3], операторы  $U_1$  и  $U_2$  в  $L_2(\bar{G}_1)$   $L_2(\bar{G}_2)$  положительны, а операторы  $\bar{U}_1 - \bar{p}_1^T \bar{w}_1$  и  $\bar{U}_2 - \bar{p}_2^T \bar{w}_2$  не являются знакоопределенными. Однако они имеют положительную вторую вариацию и, следовательно, единственные минимумы в своих областях определения.

Пусть  $k$  - общее количество узлов в  $\bar{G}$ , а  $M$ ,  $\bar{w}$  и  $\bar{P}$  - блочные симметричная матрица порядка  $k \times k \times (2 \times 2)$  и матрицы порядка  $k \times (2 \times 1)$  для всей области  $\bar{G}$ , полученная распространением  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$ ,  $\bar{w}_1$ ,  $\bar{w}_2$  на всю  $\bar{G}$ . Тогда  $\bar{U} = \bar{w}^T M \bar{w}$ , а вектор - градиент функционала  $\bar{U}$  в точке  $\bar{w}$  равен

$$\text{grad} \bar{U} = \hat{U}_{\bar{w}} = \partial \bar{U} / \partial \bar{w} = 2M^T \bar{w}. \quad (14)$$

Поскольку вторая вариация  $\bar{U}$  по  $\bar{w}$  положительна,  $\bar{U}$  выпукл по  $\bar{w}$  и, следовательно, имеет локальный минимум в  $\bar{G}$ .

Для примера при ранее описанных граничных условиях решена сформулированная выше задача при  $u_0 = 0.2$  мм для проушины толщиной 0.5 см с размером вдоль оси  $x$  210 мм, вдоль оси  $y$  60 мм и отверстием радиуса  $R = 30$  мм при  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 0.33$ .

Использовалось всего 46 КЭ и 365 узлов, из которых 23 входят только в КЭ, а 21 – являются общими узлами КЭ и сетки. Для создания сетки использовалось 342 узла.

Вычисления проводились по оригинальной программе на алгоритмическом языке TurboPascal 7.0. Функционал  $\bar{U}$  минимизировался методом инерционного спуска с проецированием градиента  $\hat{U}_{\bar{w}}$  на область  $\bar{G}$  [4], то есть в точках  $s_2 - s_4$  и  $s_9$ , где заданы перемещения, компоненты градиента определялись с учетом заданных перемещений, а соответствующие компоненты градиента полагались равными нулю. В точках, границ с ограничениями на производные перемещения, компоненты градиента определялись с учетом соотношениями между этими производными.

Вектор  $\bar{w}$  определялся по итерационной формуле  $\bar{w}_{i+1} = \bar{w}_i - t \hat{U}_{wi}(\bar{w}_i) + \alpha(\bar{w}_i - \bar{w}_{i-1})$ , где  $t$  шаг;  $\alpha$  - в первом приближении заданная величина и изменяющаяся в процессе вычислений с учетом информации о величине  $\hat{U}_{wi}$  и различии направлений  $\hat{U}_w(\bar{w}_i)$  и  $\hat{U}_w(\bar{w}_{i-1})$ .

В качестве начального приближения использовался вектор  $\bar{w}_0$ , удовлетворяющий граничным условиям для  $u$  и  $v$  на  $S_4$  и  $S_9$  точек закрепления. В части ограниченной узлами 169, 192, 342 и 316  $u$  и  $v$  определялись как при растяжении. В прочих точках перемещения принимались равными нулю.

Таблица 1

Результаты вычислений для  $s_4$

$N$	192	216	240	264	289	315	342
$u$	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
$v$	0	-0.0028	-0.0055	-0.0083	-0.0110	-0.0138	-0.0165
$\sigma_x$	333.33	333.36	333.36	333.33	333.33	333.33	333.33
$\sigma_y$	11.339	19.000	17.808	18.026	16.473	16.889	0.0000

Таблица 2

Результаты вычислений для характерных узлов

$N$	184	208	232	256	281	307	334
$u$	0.1333	0.1333	0.1333	0.1333	0.1333	0.1333	0.1333
$v$	0	-0.0027	-0.0055	-0.0083	-0.0110	-0.0138	-0.0165
$\sigma_x$	333.337	333.365	333.363	333.365	333.363	333.365	333.336
$\sigma_y$	11.100	18.000	17.230	17.010	16.163	16.003	0.0000
$N$	175	199	223	247	272	298	325
$u$	0.0583	0.0583	0.0558	0.0820	0.0581	0.0581	0.0543
$v$	0	-0.0027	-0.0055	-0.0080	-0.0114	-0.0111	-0.0158
$\sigma_x$	333.366	333.366	333.845	333.413	349.711	394.582	417.844
$\sigma_y$	1.2760	-0.6344	4.675	-6.916	53.186	41.795	0

Для определения энергии и вычисления градиента матрица  $m$  не использовалась, что позволило решить эту задачу по программе на языке Pascal на ПС.

Вычисления показали, что результат минимизации  $\tilde{U}$  слабо (в пределах вычислительных погрешностей) зависит от выбора  $\bar{w}_0$ . Скорость сходимости вычислений, зависела от величины перемещения на границе  $s_4$  и  $\alpha$ . При начальном  $\alpha = 1$  решение получалось за 150-1500 приближений в режиме диалога. Важно отметить, что в процессе оптимизации при монотонном убывании  $U$  величины  $U_1$  и  $U_2$  могут изменяться не монотонно.

В таблицах 1 и 2, где  $N$  - номера узлов, приведены перемещения  $u$  и  $v$  в мм и нормальные напряжения в узлах  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  в МПа.

### Список литературы

1. Ряжских, В.И. Об одном методе решения краевых задач с эллиптическими операторами / В. И. Ряжских, А. В.Ряжских, В. А.Рябцев // Прикладная физика и математика. – 2018. - №2. - С. 46-50.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Перевод с английского / О. Зенкевич ; – М.: Мир, 1975. – 542 с.
3. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин ; – М.: Наука, 1970. - 512 с.
4. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию / Б.Т. Поляк ; – М.: Наука, 1983. - 384 с.

Voronezh State Technical University

## **Flat stress state of an eye connected to a round inclusion**

V.I. Ryazhskikh, A.V. Ryazhskikh, V.A. Ryabtsev

***Аннотация.** In the paper, the plane stress state of a thin plate in the form of an eye connected to a round rigid body is considered in a variational formulation. The problem is solved by a hybrid method using optimization methods, finite elements and finite differences. The symmetrical effect is investigated and therefore half of one of the parts located near the hole is considered.*

***Ключевые слова:** plane stress state, plate, hybrid method, optimization method, finite element method, finite difference method.*